



TITLE:

# 定在波の時間発展(流体における波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

岡村, 誠

---

CITATION:

岡村, 誠. 定在波の時間発展(流体における波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 1993, 830: 103-112

ISSUE DATE:

1993-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83354>

RIGHT:

# 定在波の時間発展

九大応力研      岡村 誠 (OKAMURA Makoto)

## 1. はじめに

題名は定在波の時間発展とありますが、ここでやろうとしていることは、実験で観測されている水面進行波の振動数低下現象を数値計算によって説明することである。ここでは新しい砕波モデルを使って定在波を題材にする。まず進行波、定在波、搬送波の振動数低下という言葉の説明からはじめよう。

### 1.1 定在波とは？ 進行波とは？

まず定在波と進行波の言葉の違いを述べよう。定在波は同じ位相の場所が時間とともに変化しない。進行波は同じ位相の場所が時間とともに変化（進行）する。その時、同じ位相の場所の動く速さを位相速度と言う。例えば“同じ位相”という言葉をも“水面の傾きがゼロの部分”と置き換えてもよい。定在波では“水面の傾きがゼロの部分”を腹と呼ぶ。

以下の数値計算では2つの壁の間の10個の定在波に微小攪乱が加わっている初期状態から出発する。始めのうちは定在波らしい動きを見せるが（例えば10個の波の腹の部分は同じように上下する）、時間がたつて定在波が変調（ある時刻での10個の腹の部分の変位が同じでなくなることを）を受けると、腹の位置が時間変化しないと言う定在波の特徴が薄れてくる。変調を受け、腹が動きだすと定在波なのか進行波なのか分らなくなる。上の定義からだこの状態は進行波のようだが、10個の腹のうち、動いているのも止まっているものがあるなら、定在波とも進行波とも言

えないと思う。以下で扱うのはこんな状態も含んでいる。

数値計算で表面の各場所での表面の傾きをみていくと、次のことがわかる。その場所の位相が進行波のように動いていくなら、表面の傾きはいつも  $30^\circ$  以下である。一方、その場所の位相が定在波のようにほとんど動かないなら、表面の傾きはいつも  $45^\circ$  以下となる。これらの傾きはそれぞれの極限波の波頭のなす角度  $120^\circ$  と  $90^\circ$  に対応している。

## 1.2 問題設定

もう少しちゃんと問題設定を述べよう。2次元非粘性、非圧縮流体が自由表面と2つの垂直な壁にはさまれて渦なし運動をしている。流体は無限深さで、表面張力は無視している。2つの垂直な壁にはさまれていることを除けば、水の波の問題ではよく見かける仮定である。この問題設定だけでは砕波に関係があると思われる搬送波の振動数低下現象は説明できない。これについては“3.1 モデル化していない計算結果”の項を参照。以下に述べるように砕波現象をモデル化して、その効果を取り入れる。この2つの壁の間に10個の定在波と適当な微小攪乱の和を初期状態として、上記の仮定のもとでの水の波の方程式系を数値計算する。波の振幅に関する近似はしていないことに注意。数値計算は J.W.Dold と D.H.Peregrine<sup>1)</sup>による境界積分法で行なった。

## 1.3 搬送波の振動数低下

ここで水面進行波における搬送波の振動数低下現象について、簡単に述べておこう。長い水槽の一端で造波機によって生成された一定振幅、一定振動数（あるいは波長）の波（搬送波）は時間が経つ（造波機から離れる）につれて Benjamin-Feir 不安定によって変調する。つまり造波機の近くでは空間的・時間的に一定だった振幅や振動数が、造波機から離れた

場所では空間的にも時間的にも変化するようになる。しかし、波がもっと造波機から離れると変調はおさまり、一定振幅、一定振動数の“初期状態”の波にほぼ戻る。これは再帰現象と言われている。ただここで特徴的なのはこの振動数が初期の振動数に比べて小さいことである<sup>2)</sup>。

## 2. 砕波モデル

以下のような2種類の砕波モデルを使って数値計算を行なった。

1. あるひとつの時刻でのみ 速度ポテンシャルを操作する。この時、表面変位は操作しない。(モデル1)
2. ある条件を満たしたら、速度ポテンシャルを操作する。この時、表面変位は操作しない。(モデル2)

モデル1の“あるひとつの時刻”とは波がかなり変調しているある時刻である。この場合ポテンシャル操作は1回きりなので、速度ポテンシャル $\phi(x, t)$ をかなり大きく変化させる。具体的には、ある時刻 $t = t_0$ で

$$\phi_{\text{new}}(x, t_0) = \phi_{\text{old}}(x, t_0)(1 - \cos 0.1x)/2 \quad (1)$$

と速度ポテンシャルを操作する。このとき $x \approx 0$ あたりで大きく変調しているとする。このモデルでは大きく変調している部分の運動エネルギーをごっそり取り除いている。つまり、砕波現象を $t = t_0$ での運動エネルギーの操作に押し込めている。

モデル2の“ある条件”とは、例えば表面の傾きが $22^\circ$ 以上になることとする。その時、速度ポテンシャルの、例えば、2倍高調波（波長 $= \pi$ ）より高次の高調波成分をゼロにするという操作を行なう。具体的には、搬送波が10個で $t = t_0$ の時、上記の表面の傾き条件を満足するならば

$$\phi_{\text{old}}(x, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx/10) \quad (2)$$

と表されている速度ポテンシャルが

$$\phi_{\text{new}}(x, t_0) = \sum_{n=0}^{20} a_n \cos(nx/10) \quad (3)$$

のような操作をうける。モデル2はモデル1のようにある時刻で運動エネルギーをごっそり取り除くのではなく、数値計算の時間ステップ毎にちょびちょび取り除く。モデル1はモデル2の特別の場合ともいえる。

これらのモデルが実験<sup>2-3)</sup>とはどういうふうに結びついているのかをみていこう。造波機で作られた一様な進行波列は進行していくにつれて、Benjamin-Feir 不安定によって変調する。大きく変調した時、振幅の大きいところの波頭付近で小規模の碎波（崩れ波碎波）が起る。これはサーフィンをする時に乗っかる巻き波碎波と違って碎波の時に波形はそんなに变化しない。その後、振幅や振動数がほぼ一様な、しかし、振動数が初期より小さくなった進行波列になる。上で述べたモデルは“振幅の大きいところの波頭付近での小規模の碎波”の現象をモデル化しているつもりである。

このモデルの特徴は速度ポテンシャルのみを操作して、表面変位はいじらないことである。上記の水の波の数値計算では、初期での表面変位と表面での速度ポテンシャルがわかれば、解は一意に決まる。つまり表面変位も同様に操作できる自由度はある。しかし、速度ポテンシャルだけを操作するのは Melville たちの以下の実験事実<sup>4)</sup>による。Melville たちは進行波の水槽実験において、表面変位と表面での流体の水平速度を丹念に調べた。碎波が起っていない時（目で見て判断している）、表面変位と水平速度は波が進行定常的に進んでいるときの関係を満たしている。碎波が起った時にはその場所での水平速度が突然大きくなる。一方、表面変位の時間変化のデータには著しい変化は見られない。つまり、ある場所での表面変位と水平速度の時間変化をあらわす2つのデータがある

時、砕波がいつ起っているかは水平速度の時間変化のデータに注目すればすぐわかる。モデルでは“水平速度が突然大きくなり流体が表面から飛び出す”現象を速度ポテンシャルの減少として取り入れた。

### 3. 数値計算の結果

表面の速度ポテンシャル $\phi(x, t)$ と表面変位 $\eta(x, t)$ が従属変数である。これらの初期条件 ( $t = 0$ ) を

$$\phi(x, 0) = 0 \quad (4)$$

$$\eta(x, 0) = [\text{定在波}] + 0.2 \times 0.1 \times \left( \cos \frac{11x}{10} + \cos \frac{9x}{10} \right) \quad (5)$$

とした。攪乱の振幅は定在波の振幅の10分の1とする。波高とは波数と振幅の積である。定在波の波長は $2\pi$ で波高は0.2で、 $x = 0$ と $x = 20\pi$ の壁の間に10個ある。表面上の257個の流体粒子の運動を計算している。

#### 3.1 モデル化していない計算の結果

図1にモデル化をしていない計算結果を示している。定在波では各フーリエ・モードはそれぞれ異なった周期（ほぼ $2\pi$ ）で振動しているので、表面変位のフーリエ・モード（波数 $= 1, 1 \pm 0.1, 1 \pm 0.2, 1 \pm 0.3$ ）の時間変化の包絡線を描いている。ここで $L_1, L_2, \dots$ は攪乱の波数が $9/10, 8/10, \dots$ であるモードを示して、 $H_1, H_2, \dots$ は攪乱の波数が $11/10, 12/10, \dots$ であるモードを示している。この図から不安定モードである $L_1, H_1$ は最初は同じように増幅するが、時刻 $t = 400$ あたりから $L_1$ のほうが大きくなることがわかる。同じことが進行波の場合でも見られる。他のモード( $L_2, H_2, \dots$ )は初期にはないが、搬送波モードと $L_1, H_1$ モードとの非線形相互作用によって生成される。高調波成分は図には描いてない。

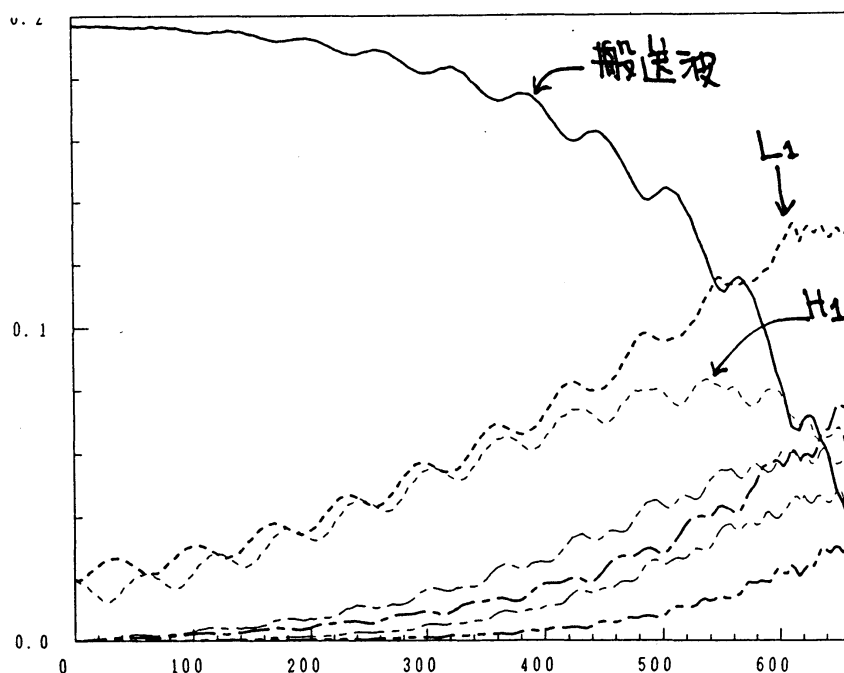


図 1: 表面変位のフーリエ・モードの時間変化の包絡線。太い実線は搬送波の線形モード。太い破線、一点破線、二点破線は  $L_1, L_2, L_3$  モード。細い破線、一点破線、二点破線は  $H_1, H_2, H_3$  モード。

実験では異なる場所での表面変位の時間変化を比べているので注目するのは振動数だが、数値計算では異なる時刻での表面変位の空間変化を比べているので注目するのは波数である。以下で“波数低下”と書くところを“振動数低下”と書いていることに注意。

この計算は  $t \approx 660$  で、計算不可能になっている。この時刻で波頭の一つがとがってしまい、表面変位の微分がそこで不連続になる。この計算スキームでは表面変位の微分の連続性は仮定されているので、計算不可能となる。この表面変位のとがりの角度はほぼ  $120^\circ$  で最大波高の進行波の角度と同じである。この時、確かにこの波のてっぺん（かなりとがっている所）は動いている。

初期条件での定在波の波高を 0.2 から 0.1 に小さくすると、波頭がとがることはなく、変調と再帰を繰り返す。図 2 にその結果を示す。再帰

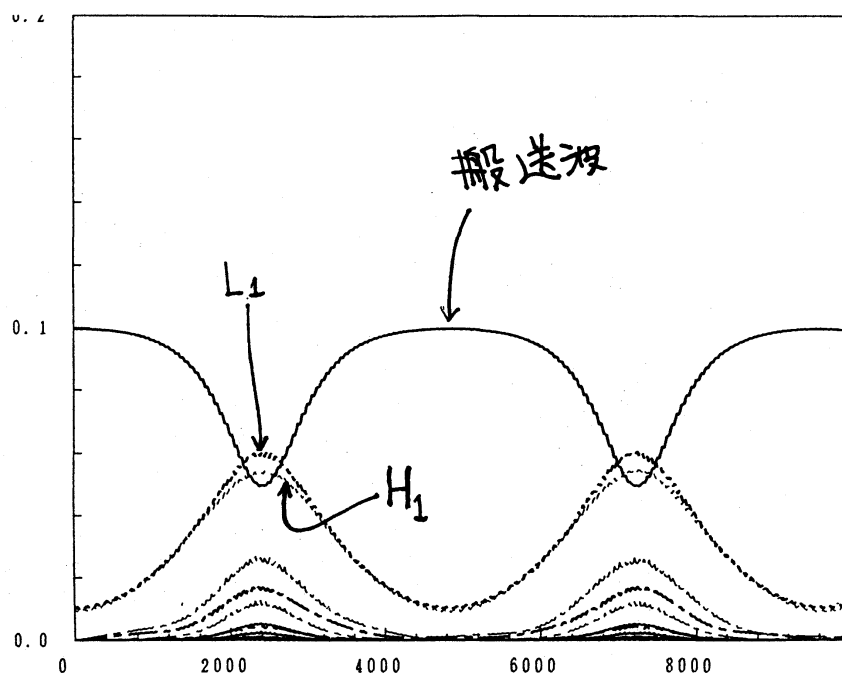


図 2: 表面変位のフーリエ・モードの時間変化の包絡線。太い実線は搬送波の線形モード。太い破線、一点破線、二点破線は  $L_1, L_2, L_3$  モード。細い破線、一点破線、二点破線は  $H_1, H_2, H_3$  モード。

した時に搬送波の振動数低下は見られない。これは弱非線形での結果と大差はない。また波高を 0.2 より大きくしていくと、波のとがる時刻がはやくなくなる。

### 3.2 モデル 1 の結果

初期条件は (4) と (5) を使う。速度ポテンシャルを操作する時刻は  $t = 616$  とする。図 1 を見てもこの時刻での変調は大きそうである。この時刻で (1) のように速度ポテンシャルを操作した場合の計算結果を図 3 に示す。時刻が 616 から 1000 ぐらいまでは  $L_1$  モードが主要項である。その後  $L_2$  と搬送波のモードが大きくなるが ( $t \approx 1500$ )、再び  $t \approx 2500$  で  $L_1$  モードが主要項になる。 $t > 616$  では、 $L_1$  を搬送波、 $L_2$  と搬送波を  $L_1$  の側帯波とみれば、図 2 のような変調と再帰が起っている。これは  $t = 0$  での搬送波より振動数の小さい搬送波が  $t = 616$  でのポテンシャル操作に



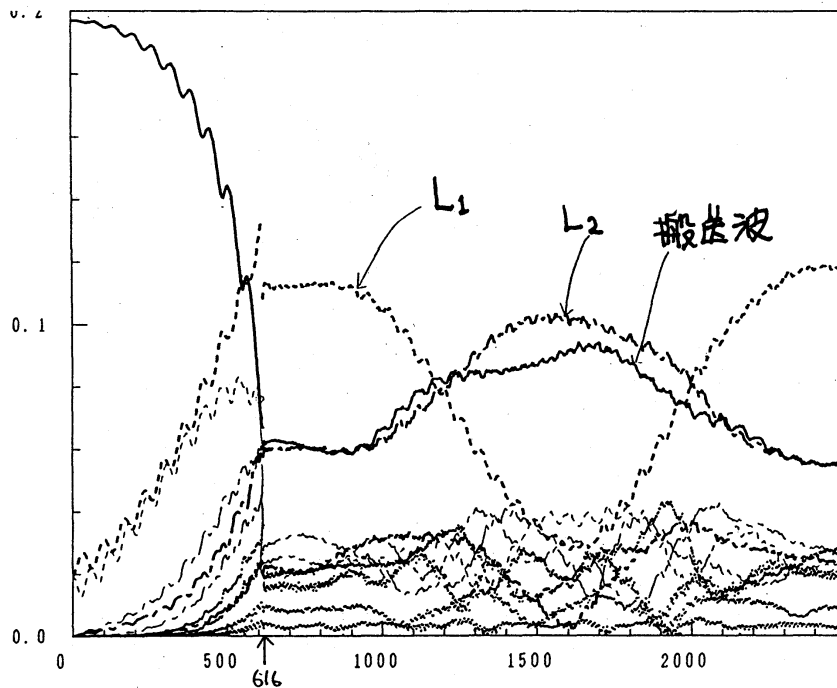


図 3: 表面変位のフーリエ・モードの時間変化の包絡線。太い実線は搬送波の線形モード。太い破線、一点破線、二点破線は  $L_1, L_2, L_3$  モード。細い破線、一点破線、二点破線は  $H_1, H_2, H_3$  モード。点は  $L_{4\sim 7}, H_{4\sim 7}$  モード。

よって生まれたと言える。

図 3 をみると、 $t = 616$  でフーリエ・モードが不連続になっていると思うかもしれない。以前にも述べたが、この図はフーリエ・モードの包絡線を描いているのである。このモデルでは表面変位に操作はしないのだから、もちろん表面変位のフーリエ・モード自身が時間的に不連続なのではなく、速度ポテンシャルの操作による速度ポテンシャルの時間的な不連続によって、表面変位の時間微分が不連続になり、表面変位のフーリエ・モードの包絡線が不連続になる。

$t = 616$  で運動エネルギーを 9 割程取り除いて、全エネルギーが 6 割程になっている。一応、搬送波の“振動数低下”をシミュレートしているが、現実的なモデルとは言えない。

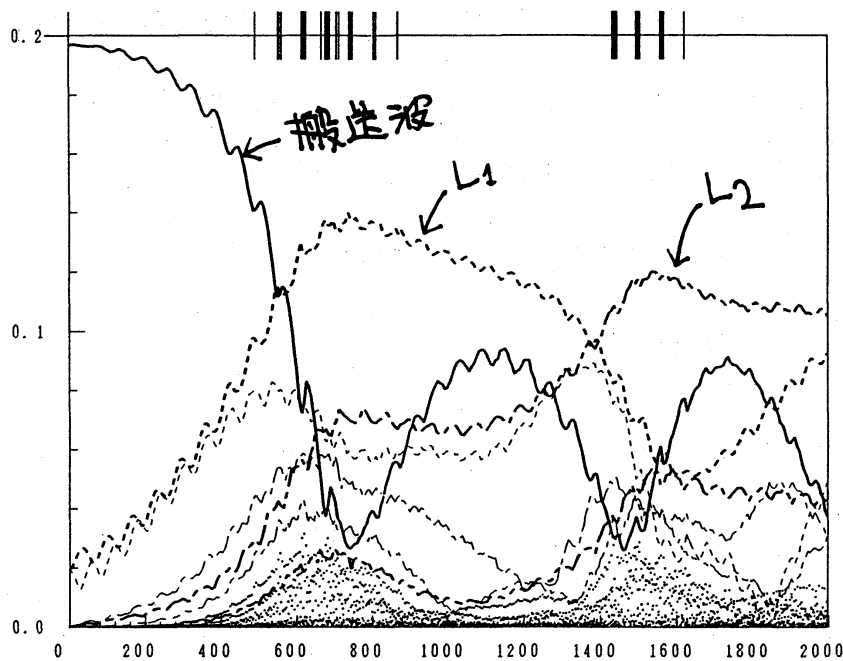


図 4: 表面変位のフーリエ・モードの時間変化の包絡線。太い実線は搬送波の線形モード。太い破線、一点破線、二点破線は  $L_1, L_2, L_3$  モード。細い破線、一点破線、二点破線は  $H_1, H_2, H_3$  モード。点は  $L_{4\sim 7}, H_{4\sim 7}$  モード。

### 3.3 モデル2の結果

もう少し現実的なモデル2の結果を示そう。初期条件はモデル1と同じ(4)と(5)を使う。ポテンシャルを操作する時の表面変位の傾きを  $22^\circ$  とし、ポテンシャルの操作は(2)、(3)のように行なう。表面変位のフーリエ・モードの時間変化を図4に示している。大きく変調をする  $t \approx 500$  あたりまではモデル化をする条件を満たしていないので、図3 ( $t = 616$  でのみモデル化の効果あり)と同じである。図4の上部に表面変位が  $22^\circ$  以上になった時刻(砕波が起っている時刻)を縦棒で表している。 $L_1$  モードのピークと  $L_2$  モードのピークに表面変位が  $22^\circ$  以上になった時刻が集中している。このモデルではこれらの時刻で砕波が起ることを予想している。 $t \approx 700$  から  $t \approx 1300$  までは  $L_1$  モードが主要項である。それ以

降では  $L_2$  モードが主要項になっている。この結果は搬送波の振動数低下現象をシミュレートしている。また搬送波の振動数再低下 ( $L_1$  モードの次は  $L_2$  モードが主要項) も予想している。しかし、モデルの演繹性は低く、恣意的な部分も多い。

#### 4. 実験への期待

前の章で砕波をモデル化した結果を簡単に述べた。このモデルでも変化させられるパラメータは多くあるし (例えば、モデル2では打ち切りモードの数やその方法、ポテンシャル操作をする時の条件など)、他にも似たようなモデルはたくさん考えられる。しかし、どのモデルでも演繹性は低いだろう。つまりある一般原理から観測事実を導けないだろう。だから、“よいモデル”を作るにはもっと多くの実験事実が欲しいのである。例えば、変調したのちは搬送波の振動数が小さくなって再帰をするのだが、そのあとはどうなるのか? 多くの実験事実があればその事実をシミュレートするモデルは、たとえ恣意的なものであれ、かなり“よいモデル”と言える。このような方向のモデル化はあまり物理的とは言えないが、現在の砕波研究はこんな状況ではないでしょうか。

#### 参考文献

- 1) J.W.Dold & D.H.Peregrine (1986) *Coastal Engineering*, 163-175.
- 2) B.M.Lake, H.C.Yuen, H.Rungaldier & W.E.Ferguson (1977) *J. Fluid Mech.*, **83**, 49-74.
- 3) W.K.Melville (1982) *J. Fluid Mech.*, **115**, 165-185.
- 4) W.K.Melville & R.J.Rapp (1988) *J. Fluid Mech.*, **189**, 1-22.